

THỐNG KÊ

Trong chương này chúng tôi chỉ giới thiệu sơ lược một số chức năng liên quan trong chương trình toán thống kê và xác suất ở phổ thông.

I. Một số hàm liên quan đến thống kê.

Các hàm giới thiệu trong mục này đều được thực hiện trong gói lệnh:

with(stats):

1. Bảng dữ liệu đơn, mẫu số liệu (danh sách, mảng một chiều).

Để nhập một mẫu số liệu trong Maple ta dùng cặp ngoặc [...].

Ví dụ 1:

Nhập mẫu số liệu ở bài tập 2/tr161_SGK ĐS10 nâng cao.

+ Nhập vào Maple như sau:

> **with(stats):**

> **data:=[165,85,65,65,70,50,45,100,45,100,100,100,100,90,53,70,141,42,50,150,40,70,84,59,75,57,133,45,65,75];**

data := [165, 85, 65, 65, 70, 50, 45, 100, 45, 100, 100, 100, 100, 90, 53, 70, 141, 42, 50, 150, 40, 70, 84, 59, 75, 57, 133, 45, 65, 75]

2. Kích thước mẫu.

Để xác định ‘kích thước mẫu’ của một mẫu số liệu **data** ta dùng hàm ‘count’ để đếm các số hạng có mặt trong mẫu số liệu đó.

Cú pháp: > **describe[count](data);**

Chẳng hạn với mẫu số liệu ở Ví dụ 1, ta xác định được kích thước mẫu như sau:

> **describe[count](data):**

`kich thuoc mau`:=%;

kich thuoc mau := 30

3. Mốt.

Để xác định ‘mốt’ của một mẫu số liệu data, ta dùng hàm ‘mode’ với cú pháp:

Cú pháp: > **describe[mode](data);**

Chẳng hạn với mẫu số liệu với Ví dụ 1, ta xác định mốt như sau:

> **describe[mode](data):**

`mot`:=%;

mot := 100

4. Tần số, tần suất.

• Để đếm tần số (số lần xuất hiện) của các số hạng (giống nhau) trong một mẫu số liệu data, trước tiên ta chuyển mẫu số liệu sang dạng mảng dùng hàm ‘Array’, sau đó dùng hàm ‘Tally’ để đếm số lần xuất hiện của mỗi số hạng.

Chẳng hạn với mẫu số liệu ở Ví dụ 1, trước tiên ta chuyển mẫu số liệu sang kiểu mảng dùng hàm ‘Array’ trong gói lệnh ‘with(Statistics):’. Cụ thể như sau:

> **with(Statistics):**

> **mauSL:=Array(data);**

$mauSL := \begin{bmatrix} 1..30 \text{ 1-D Array} \\ \text{Data Type: anything} \\ \text{Storage: rectangular} \\ \text{Order: Fortran_order} \end{bmatrix}$

+ Tiếp theo ta dùng hàm ‘Tally’ để đếm số lần xuất hiện (tần số) của các số hạng giống nhau trong mảng :

> **B:=Tally(mauSL);**

$B := [165 = 1, 42 = 1, 40 = 1, 133 = 1, 45 = 3, 141 = 1, 150 = 1, 59 = 1, 57 = 1, 53 = 1, 50 = 2, 85 = 1, 84 = 1, 90 = 1, 65 = 3, 70 = 3, 75 = 2, 100 = 5]$

Nhìn vào kết quả trên chúng ta có thể đếm được tần số của mỗi số hạng trong mẫu số liệu. (Ví dụ: tần số của số hạng 165 là 1, tần số của số hạng 65 là 3,...)

+ Để kiểm tra kết quả trên, quý bạn đọc có thể dùng hàm ‘Sort’ để sắp xếp các số hạng trong mẫu số liệu để tiện rà soát và đối chiếu. Câu lệnh như sau:

> **Sort(data);**

$[40, 42, 45, 45, 45, 50, 50, 53, 57, 59, 65, 65, 65, 70, 70, 70, 75, 75, 84, 85, 90, 100, 100, 100, 100, 100, 133, 141, 150, 165]$

Hoặc dùng lệnh sau:

> **data2:=transform[statsort](data);**

$data2 := [40, 42, 45, 45, 45, 50, 50, 53, 57, 59, 65, 65, 65, 70, 70, 70, 75, 75, 84, 85, 90, 100, 100, 100, 100, 100, 133, 141, 150, 165]$

5. Số trung bình, số trung vị.

+ *Số trung bình* của một mẫu số liệu ‘data’ được xác định bằng hàm ‘mean’ với cú pháp như sau: > **describe[mean](data);** .

+ *Số trung vị* của một mẫu số liệu ‘data’ được xác định bằng hàm ‘median’ với cú pháp như sau: > **describe[median](data);**

6. Phương sai, độ lệch chuẩn.

• *Phương sai* của một mẫu số liệu ‘data’ được xác định bằng hàm ‘variance’ với cú pháp : > **describe[variance](data);**

• *Độ lệch chuẩn* của một mẫu số liệu ‘data’ được xác định bằng hàm ‘standarddeviation’ với cú pháp :

> **describe[standarddeviation](data);**

Ví dụ 2:

Xét mẫu số liệu và các yêu cầu trong bài tập 9/tr177_SGK ĐS10 nâng cao.

Có 100 học sinh tham dự kì thi học sinh giỏi Toán (thang điểm là 20). Kết quả được cho trong bảng số liệu sau:

Điểm	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
Tần số	1	1	3	5	8	13	19	24	14	10	2	$N = 100$

- a) Tính số trung bình.
- b) Tính số trung vị và mốt.
- c) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

+ Trước tiên ta nhập mẫu số liệu trên vào Maple như sau:

```
> with(stats):  
> data := [9, 10, Weight(11, 3), Weight(12, 5), Weight(13, 8),  
Weight(14, 13), Weight(15, 19), Weight(16, 24), Weight(17, 14),  
Weight(18, 10), Weight(19, 2)];  
data := [9, 10, Weight(11, 3), Weight(12, 5), Weight(13, 8), Weight(14, 13),  
Weight(15, 19), Weight(16, 24), Weight(17, 14), Weight(18, 10), Weight(19, 2)]
```

+ Kiểm tra lại kích thước mẫu bằng lệnh:

```
> describe[count](data);  
100
```

+ Tính số trung bình bằng lệnh:

```
> describe[mean](data);  

$$\frac{1523}{100}$$

```

(Kết quả này đúng như đáp án của SGK: $\bar{x} = 15,23$)

+ Số trung vị được tính bằng lệnh:

```
> describe[median](data);  

$$\frac{31}{2}$$

```

(Kết quả này đúng như đáp án của SGK: $M_e = 15,5$)

+ Mốt được xác định bằng lệnh:

```
> describe[mode](data);  
16
```

+ Phương sai của mẫu số liệu được xác định như sau:

```
> describe[variance](data);  

$$\frac{39571}{10000}$$

```

+ Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là:

```
> describe[standarddeviation](data);  

$$\frac{\sqrt{39571}}{100}$$

```

Giá trị gần đúng chính xác đến 7 chữ số (kể cả phần nguyên).

```
> evalf[7](%);  
1.989246
```

7. Độ lệch chuẩn.

II. Hoán vị, chỉnh hợp và tổ hợp.

1. Số hoán vị của n phần tử bằng $n!$

Ví dụ 1:

Số hoán vị của 13 phần tử bằng:

> **13!**;

6227020800

2. Số tổ hợp chập k của n phần tử.

Cú pháp: > **binomial(n,k)**;

Ví dụ 2:

Tính số tổ hợp chập 25 của 100 phần tử:

> **binomial(100,25)**;

242519269720337121015504

Nếu dùng máy tính cầm tay để tính số tổ hợp này thì kết quả hiển thị sẽ không đầy đủ như trên. Chúng ta cùng xem:



Nhận xét: Dùng Maple có thể tính được (và cho kết quả cụ thể) các số tổ hợp lớn.

• Hàm liệt kê các tổ hợp chập k của n phần tử:

Cú pháp: > **choose([set], k)**;

Hàm này được thực hiện trong gói lệnh 'with(combinat):'.

Ví dụ 3:

Liệt kê các tổ hợp có 3 phần tử trong số bốn phần tử A, B, C, D:

> **restart**;

with(combinat):

choose([A,B,C,D], 3);

[[A, B, C], [A, B, D], [A, C, D], [B, C, D]]

Ví dụ 4:

Liệt kê các tổ hợp có 6 phần tử được chọn từ các chữ số 1, 2, 3,...,8.

(Trường hợp nếu tập hợp là tập n số nguyên dương đầu tiên thì ta chỉ cần khai báo **choose(n, k)**). Câu lệnh như sau:

> **with(combinat):**

choose(8, 6);

$[[1, 2, 3, 4, 5, 6], [1, 2, 3, 4, 5, 7], [1, 2, 3, 4, 5, 8], [1, 2, 3, 4, 6, 7], [1, 2, 3, 4, 6, 8],$
 $[1, 2, 3, 4, 7, 8], [1, 2, 3, 5, 6, 7], [1, 2, 3, 5, 6, 8], [1, 2, 3, 5, 7, 8],$
 $[1, 2, 3, 6, 7, 8], [1, 2, 4, 5, 6, 7], [1, 2, 4, 5, 6, 8], [1, 2, 4, 5, 7, 8],$
 $[1, 2, 4, 6, 7, 8], [1, 2, 5, 6, 7, 8], [1, 3, 4, 5, 6, 7], [1, 3, 4, 5, 6, 8],$
 $[1, 3, 4, 5, 7, 8], [1, 3, 4, 6, 7, 8], [1, 3, 5, 6, 7, 8], [1, 4, 5, 6, 7, 8],$
 $[2, 3, 4, 5, 6, 7], [2, 3, 4, 5, 6, 8], [2, 3, 4, 5, 7, 8], [2, 3, 4, 6, 7, 8],$
 $[2, 3, 5, 6, 7, 8], [2, 4, 5, 6, 7, 8], [3, 4, 5, 6, 7, 8]]$

Nhận xét: Dùng hàm này có thể giúp giáo viên kiểm tra kết quả thực hành của học sinh một cách nhanh chóng và chính xác (khi yêu cầu học sinh liệt kê số tổ hợp chập k của n phần tử trong trường hợp n nhỏ).

• *Hàm chuyển đổi cách viết tổ hợp sang dạng khai triển (kí hiệu, giai thừa):*

Ví dụ 5:

+Viết C_n^k dưới dạng khai triển:

> **convert(binomial(n,k),factorial);**

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

+ Viết C_n^3 dưới dạng khai triển:

Khi dùng lệnh binomial, ta được kết quả:

> **Cn3:=binomial(n,3);**

$$Cn3 := \text{binomial}(n, 3)$$

Chuyển đổi kết quả trên dưới dạng khai triển như sau:

> **convert(Cn3,factorial);**

$$\frac{1}{6} \frac{n!}{(n-3)!}$$

Đơn giản, ta được:

> **simplify(%);**

$$\frac{(n-2)(n-1)n}{6}$$

Ví dụ 6:

Tính tích của các số sau $a = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right)$, n nguyên dương.

+ Nhập biểu thức tính vào Maple dùng hàm ‘product’:

> **a:=product(1+1/i,i=2..n);**

$$a := \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n+1)}$$

Chú ý: Hàm gamma(n) bằng n! (nếu n nguyên dương).

Trong Maple, hàm gamma được kí hiệu bằng kí tự “ Γ ”.

+ Ta cần chuyển đổi kết quả trên sang biểu diễn theo ‘giai thừa’ như sau:

> **convert(a, factorial);**

$$\frac{1}{2} \frac{(n+1)!}{n!}$$

Đơn giản ta được kết quả:

> **simplify(%);**

$$\frac{n}{2} + \frac{1}{2}$$

2. Số tổ chỉnh chập k của n phần tử.

Ta biết, số chỉnh hợp chập k của n phần tử bằng k! lần số tổ hợp chập k của n phần tử. Từ đó ta suy ra cách tính số chỉnh hợp chập k của n phần tử như sau:

Cú pháp: > **(k!)*binomial(n,k);**

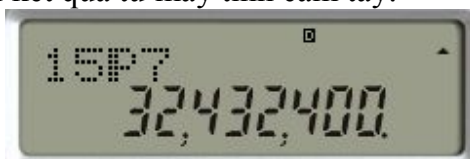
Ví dụ 7:

Số cách sắp xếp 7 học sinh được chọn từ 15 học sinh vào một cái bàn có 4 chỗ ngồi bằng số chỉnh hợp chập 7 của 15 phần tử:

> **(7!)*binomial(15,7);**

32432400

So sánh kết quả này với kết quả từ máy tính cầm tay:



III. Một số chức năng liên quan đến tập hợp.

1. Xác định một tập hợp.

2. Các phép toán trên tập hợp.

3. Một số tập hợp thường gặp.